

ELS RECURSOS HISTÒRICS EN L'ENSENYAMENT DE LA MATEMÀTICA

J. M. Núñez i Espallargas; J. Servat i Susagne

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica. Universitat de Barcelona.

Paraules clau: *educació matemàtica, història de la matemàtica.*

The historic recourses in the mathematical education

Summary: The paper analyzes the most essentials trends of the historic investigations in the field of mathematical education and the principal characteristics of their application at the class-room activities.

Two different kinds of examples are presented. The first is belonging to the arithmetic field: brief discussion of the general advantages and obstacles when the teacher introduce old algorismes in calculus training and, more in particularly, the presentation of alternative methods for the determination of square roots. The second example pertain to the geometry: the recuperation of classical methods (equidescomposition and quadrature) in the measure of the surface of poligonal figures and their adaptation to the modern computer technology.

Key words: *mathematical education, history of mathematics.*

1. Els recursos històrics en l'ensenyament de la matemàtica: les dificultats i els avantatges

La utilització de la història com a recurs didàctic en l'ensenyament de la matemàtica és una metodologia no gaire emprada pel professor d'aquesta matèria. Els arguments que es fan servir per tal de justificar aquest desinterès són de tota mena, però possiblement, els més citats fan referència a la creença que els temes antics i especialment el seu enfocament i tractament es troben massa allunyats dels enfocaments i tractaments actuals. A més a això s'hi afegeix la dificultat lèxica i terminològica dels textos clàssics, si és que es vol fer ús de fragments originals o traduïts. Tots aquests arguments i d'altres són certs, especialment, si no hem tingut cura a l'hora de seleccionar els temes o els textos en funció dels coneixements previs dels nostres alumnes i de la seves necessitats.

Però també és igualment cert, que la utilització a la classe de matemàtiques dels recursos històrics, adequadament comentats i analitzats, pot aportar elements valuosos a la formació integral de l'alumne. Presentar a un grup d'alumnes un problema o una qüestió, que ells poden comprendre fàcilment, encara que aquests problemes no pertanyin al seu context

quotidià, permet ajudar al professor a explicar conceptes o aplicacions de la matemàtica difícils d'assimilar presentats d'una manera genèrica o abstracta. A més a més, la perspectiva històrica ens permet fer comprendre el paper que hi juguen determinades tècniques o mètodes matemàtics davant d'altres que van predominar en el passat. Tindrem així, elements per avaluar millor l'avenç de les matemàtiques en paral·lel amb el progrés de la humanitat, al mateix temps que hi descobrim elements de la interrelació entre matemàtiques i societat, aspecte aquest últim que actualment sembla relegat a un segon pla per la prioritització dels aspectes tecnològics de l'educació matemàtica. També s'ha de dir que no és gens menyspreable la possibilitat de «fer matemàtiques» que ofereix l'anàlisi d'un problema en un context o amb una metodologia diferents de les habituals.

2. Els recursos històrics en l'ensenyament de la matemàtica: alguns mites massa arrelats

Una de les creences més sòlidament afermades és que la introducció de fragments o elements històrics a la classe de matemàtiques implica necessàriament fer referència a èpoques molt pretèrites. Però no sempre ha de ser així, no cal rastrejar el passat llunyà. Amb freqüència, textos relativament recents poden ser exemplaritzants si l'alumne percep una sensació d'allunyament. A vegades, aquest efecte no ve donat per la llunyania en el temps, sinó per la llunyania cultural: incloure entre les nostres activitats a l'aula la lectura de textos escrits per autors d'altres pobles, d'altres països, pot motivar la curiositat dels alumnes i provocar debats de gran valor formatiu. En aquest sentit l'etnomatemàtica ofereix un potencial educatiu que els professors de matemàtiques encara no hem apreciat suficientment.

Un altre mite molt arrelat quan es parla dels recursos històrics en l'ensenyament de la matemàtica és el d'associar l'elecció de textos amb els noms i les obres dels matemàtics cabdals, bé siguin de l'antiguitat, del Renaixement o de les èpoques moderna i contemporània. És cert que determinats fragments d'autors com ara Arquímedes, Descartes, Euler, Galois, Gauss, Cantor, Poincaré o Russell, per esmentar-ne només alguns dels més citats, ens ofereixen lectures admirables i profitoses des del punt de vista de la docència de la matemàtica.

Però també poden servir de fons documentals de notable interès per a l'ensenyament de la matemàtica fragments de les obres d'altres figures, que han estat més o menys importants en el camp del pensament, i que, si bé entre altres disciplines han conreat la matemàtica, no són especialment conegudes per les seves aportacions a la teoria o cos matemàtic. Aquest podria ser el cas de Plató i l'ús que de la teoria de la divisibilitat fa en la seva concepció de la ciutat-estat; el de Boeci i el seu tractament del concepte de número; el de Ramus i la seva preocupació pels aspectes didàctics de l'ensenyament de la matemàtica; els diàlegs de Pérez de Moya i la utilització del joc matemàtic com a recurs per l'aprenentatge d'aquesta ciència; entre molts altres.

Finalment, cal assenyalar que hi ha un camp molt poc treballat, però que ofereix múltiples possibilitats per al docent interessat en els recursos històrics. És el cas de l'antic llibre de text, escrit per persones que ja han caigut en l'oblit, però que en els seus manuals van aportar idees, problemes, mètodes per a l'ensenyament de la matemàtica, algunes de les quals poden ser inspiradores de «nous» recursos a l'aula. Cal buscar materials per utilitzar a la classe en els textos dels diferents nivells de l'ensenyament de la matemàtica, així com en els manuals per a l'ensenyament d'antics oficis o professions, perquè sovintegen les sorpreses per a l'historiador d'educació matemàtica.

A continuació farem dues aplicacions de bona part del que hem dit a dos contextos diferents, ambdós dintre del camp de la matemàtica, l'un pertanyent a l'aritmètica i l'altre a la geometria.

3. Utilització d'antics algorismes en l'ensenyament i l'aprenentatge del càlcul

A l'ensenyament primari un dels objectius més treballats a l'aula de matemàtiques és l'adquisició teòrica i pràctica dels algorismes de les operacions aritmètiques bàsiques. Aquests algorismes són percebuts per part dels alumnes com els procediments invariables i únics per determinar el resultat de les operacions. A les experiències didàctiques portades a terme ha estat profitosa la introducció a la classe d'altres algorismes històrics, i no tan sols com a ajuda per ensenyar les fases d'un determinat procediment operatiu, sinó també com a reflexió sobre el caràcter de la matemàtica i el paper de les diverses cultures en el seu desenvolupament. Val a dir que, en la major part dels casos, la presentació d'altres algorismes a la classe s'ha fet com una activitat lúdica i, solament, en situacions concretes s'ha introduït com a alternativa real del procediment de càlcul habitual.

Tenim recollits molts d'aquests antics procediments de càlcul, des d'aquells que només impliquen una modificació formal en l'algorisme deixant l'estructura essencial intacta, fins a aquells que suposen un nou plantejament del procés resolutori. Entre els primers cal situar els algorismes anomenats «indis», pel fet de ser una derivació dels procediments originals elaborats pel poble inventor del sistema decimal posicional, i que, bàsicament, coincideixen amb els habituals excepte en l'ordre d'actuació, que és el d'«esquerra a dreta». És fàcil mostrar a l'alumne que totes les operacions es poden realitzar començant per l'esquerra. Això, a més de ser matemàticament correcte, és coherent amb l'ordre de lectura. Precisament, el fet que nosaltres procedim per la dreta és conseqüència de l'adaptació del procés indi original feta pels àrabs, introductors, com és ben sabut, dels algorismes a Europa. Fem observar que la presentació dels algorismes «per l'esquerra» no és tan sols una curiositat matemàtica, sinó que té un notable interès didàctic. Així, la sostracció «per l'esquerra» evita el fet d'haver de «portar», pas que dificulta l'aprenentatge d'aquest algorisme a l'escola. Encara que no ens podem estendre més en les implicacions didàctiques, assenyalarem un altre fet: en la divisió habitual hi ha una barreja d'orientacions (els agrupaments es fan per l'esquerra i, en canvi, les multiplicacions parcials per la dreta), mentre que si es procedeix sempre per l'esquerra no es dona cap canvi en el sentit de realització del càlcul.

Podríem parlar molt dels avantatges pedagògics de presentar altres algorismes històrics que impliquen petits o grans canvis conceptuals en els procediments de càlcul, així com de la introducció de «màquines» de calcular emprades per la humanitat en altres temps o en altres cultures, com ara els àbacs, la taula de calcular medieval o les varetes de Neper, però davant la brevetat que ens hem imposat, ens limitarem a comentar el cas d'un algorisme més complex que els de les quatre operacions aritmètiques elementals i en el qual, a les nostres investigacions, ha estat determinant la informació obtinguda als antics llibres de text: és el cas de l'algorisme de l'arrel quadrada.

Molts educadors són partidaris d'eliminar dels programes l'algorisme del càlcul de l'arrel quadrada, que per la seva complexitat és difícil d'aprendre i s'oblida amb molta facilitat. Argumenten aquesta opinió dient que les calculadores fan la seva funció amb molta més

rapidesa i, a més, diuen que el procediment habitual no comporta cap element o concepte matemàtic nou per a l'alumne. Hi ha d'altres professors que són partidaris de conservar-ho, però modificant la metodologia didàctica per fer-la més heurística.

Finalment, alguns intenten una tercera via, proposant algorismes alternatius més fàcils d'ensenyar i d'aprendre. Recentment, en una obra sobre didàctica del càlcul s'analitzava la possibilitat d'emprar el conegut teorema de l'àlgebra segons el qual la suma dels n primers senars consecutius és igual a n^2 (GÓMEZ, 1988). D'aquesta manera, l'extracció de l'arrel quadrada d'un nombre podria calcular-se determinant la quantitat de senars consecutius que se li poden restar al valor inicial. La qüestió fonamental radica en proposar un procediment que abregés la sostracció de senars consecutius i que fos també pràctic d'aplicar. Doncs bé, en un estudi portat a terme pels autors sobre els llibres de text de matemàtiques en llengua catalana s'ha pogut descobrir en un d'ells un algorisme molt senzill basat en aquest principi (NÚÑEZ, SERVAT, 1993a). Es tracta d'un manual d'aritmètica publicat al 1899 per Camil Vives per servir com a text al Col·legi Sant Jordi, primer centre dels temps moderns en impartir ensenyament en la llengua del país a Catalunya (VIVES, 1899). En aquesta obra es desenvolupa completament un mètode molt simple de calcular l'arrel quadrada basat en la sostracció consecutiva de nombres senars. Hem d'advertir per la nostra banda, que si bé Camil Vives l'aplica exclusivament a nombres naturals quadrats perfectes, hem provat que no hi cap inconvenient d'ordre matemàtic per estendre el procediment a tota mena de nombres naturals o racionals, de manera que es pot determinar sempre l'arrel quadrada amb el grau d'aproximació que es vulgui (NÚÑEZ, SERVAT, 1993b).

També entre els procediments proposats com alternativa a l'algorisme habitual hi ha un mètode, ben conegut des de temps antics, basat en la determinació d'arrels aproximades mitjançant divisions successives del nombre per aquests valors. També, sobre aquesta qüestió, els llibres de text antics ens poden donar idees. Per exemple, en una obra d'Enric Vilaret publicada abans de la Guerra Civil (VILARET, 1930), que ja anuncia a la portada un «*nuevo procedimiento, asombroso por su sencillez, para la extracción de raíces*», s'explica un mètode per determinar les arrels quadrades mitjançant aproximacions successives, que si bé l'autor només l'aplica als nombres quadrats perfectes, no hi ha cap obstacle teòric per estendre el procediment a tots els nombres racionals (NÚÑEZ, SERVAT, 1993b).

4. Les antigues metodologies i el concepte i la determinació d'àrees de polígons

Un capítol important en l'ensenyament de la geometria, tant a la primària com a la secundària obligatòria, és el dedicat al concepte i càlcul de les àrees de figures geomètriques. En termes generals l'estratègia habitual passa per definir el concepte d'àrea d'un quadrat i, després, deduir, amb més o menys rigor, les fórmules que permeten calcular la superfície dels polígons més senzills, com ara triangles, diferents quadrilàters i polígons regulars. Les tècniques emprades en aquestes deduccions són diverses, però en general tenen un interès secundari, davant la prioritat evident de trobar les expressions algebraïques.

Actualment els corrents moderns en didàctica de la matemàtica tendeixen a l'aprenentatge significatiu dels conceptes i dels procediments i això a provocat una revifalla dels mètodes estrictament geomètrics sobre els algebraics en l'ensenyament de la geometria. Pel que fa al cas que ens ocupa, el concepte i el càlcul d'àrees, ha resultat altament inspirador re-

buscar en els antics llibres de text. Hem observat que en molts manuals del segle XIX es prioritza com a metodologia l'equidescomposició de figures geomètriques, és a dir, la partició d'una figura mitjançant talls i posterior moviment de les peces resultants de manera que es pot reconstruir una altra figura que posseeix evidentment la mateixa àrea que la inicial. La comparació de les respectives dimensions serveix per proposar les relacions quantitatives entre els elements característics de les figures geomètriques. Val a dir que aquest mètode és essencialment geomètric i que, a més d'estimular la manipulació espacial en l'alumne, dóna una autèntica percepció visual i intuïtiva del concepte d'àrea com a invariant davant de les equidescomposicions. Els textos de geometria clàssics que coneixem no donen una panoràmica de conjunt, únicament ofereixen tot un ventall de solucions o receptes particulars. Treballs com ara el de Boltyanski, entre d'altres, han permès una formulació matemàtica del problema de l'equidescomposició (BOLTYANSKI, 1973). Sobre aquestes bases teòriques, els autors han desenvolupat un procediment general i sistemàtic per obtenir a partir de qualsevol polígon elemental tots els altres polígons estudiats a l'ensenyament bàsic, a través de recorreguts per diferents figures equidescomponibles (SERVAT, NÚÑEZ, 1997).

Un àmbit més ampli per a l'aplicació didàctica dels recursos històrics el tenim quan s'ensenya la determinació d'àrees de figures poligonals connexes en general. La metodologia habitual consisteix a dividir la superfície en triangles, calcular després l'àrea individual de cadascun d'ells i, finalment, fer la suma d'aquests valors. Però, si analitzem llibres de text del segle XIX hi trobarem altres maneres de determinar l'àrea de polígons, especialment en aquells textos que dediquen alguns capítols a la topografia (tema, per altra banda, oficial en els programes de geometria superior del segle XIX). A la majoria dels casos també es proposa la partició del polígon en altres de més senzills, però les tècniques són diverses, depenen de la forma, mida o accessibilitat a l'interior de la figura.

Si ens allunyen més en el temps, la metodologia canvia, es torna més netament geomètrica. Predominen les tècniques de quadratura, és a dir, la conversió de la figura inicial en un quadrat d'igual àrea. En aquests casos el que s'ofereix és un conjunt de situacions particulars amb la seva resolució també particular, moltes vegades enginyosa, però complexa i difícil d'aplicar a l'aula. D'aquí l'interès que presenta un antic text del segle XVII, escrit per un artesà sevillà de la construcció, anomenat López de Arenas, que anava adreçat als seus companys d'ofici, normalment analfabets i amb pocs coneixements aritmètics, però que, per les seves necessitats professionals havien de calcular superfícies de solars i terrenys (LÓPEZ DE ARENAS, 1633). En aquesta petita obra, l'autor desenvolupa una metodologia de caràcter mixta entre la descomposició i la quadratura, molt fàcil de comprendre i d'aplicar a totes les figures poligonals. A més a més, aquesta tècnica, de la mateixa manera que les de descomposició comentades, permet el tractament informàtic i, amb programes com ara el CABRI-2, és possible combinar eficaçment la manipulació geomètrica amb els recursos moderns que simplifiquen les feines laborioses d'aquests antics procediments (NÚÑEZ, SERVAT, 1998).

5. Bibliografia

- BOLTYANSKI, V. G. (1973), *Figuras equivalentes y equidescomponibles*, Méjico, Limusa.
GÓMEZ, B. (1988), *Numeración y cálculo*. Madrid, Síntesis.
LÓPEZ DE ARENAS, D. (1633), *Breve compendio de la carpinteria de lo blanco, y tratado*

de alarifes, con la conclusión de la regla de Nicolas Tartaglia y otras cosas tocantes a la geometria y puntas del compas, Sevilla, Luis de Estupiñán.

NÚÑEZ, J. M.; SERVAT, J. (1993a), «Els llibres de text de matemàtiques en llengua catalana durant el període 1899-1938», *Temps d'Educació*, núm. 9, pàgs. 249-286.

NÚÑEZ, J. M.; SERVAT, J. (1993b), «Los algoritmos para el cálculo de la raíz cuadrada y sus antecedentes en textos escolares antiguos», *Enseñanza de las Ciencias*, 11 (1), pàgs. 69-77.

NÚÑEZ, J. M.; SERVAT, J. (1998), «Los recursos históricos en la educación matemática: el Tratado de Alarifes de Diego López de Arenas», *Educación Matemática*, 10, (2), pàgs. 121-132.

SERVAT, J.; NÚÑEZ, J. M. (1997), «La equidescomposició de figuras geométricas como metodología didáctica en la enseñanza de la geometría», *Elementos de Matemática*, XI, núm. 44, pàgs. 5-16; XII, núm. 45, pàgs. 5-16.

VILARET, E. (1930), *El matemático moderno*, Barcelona, B. Bauzá.

VIVES, C. (1899), *Aritmetica teórich-práctica*, Barcelona, Estampa de'n Pere Torrella.